

# 高速角接触球轴承变形和接触角的数值分析与求解

张家库<sup>1</sup>, 李志远<sup>1</sup>, 张朝煌<sup>2</sup>

(1. 合肥工业大学机械与汽车工程学院, 安徽合肥 230009; 2. 洛阳轴承研究所, 河南洛阳 471039)

**摘要:** 文章在 Hertz 接触理论的基础上, 应用 Harris 滚动轴承分析理论, 针对球轴承, 分析了其内部变形、接触角及其求解方法; 并以角接触球轴承为例, 应用哈姆罗克 Hertz 接触的简化解, 对角接触球轴承内部变形进行了数值分析与计算, 以便于高速轴承和轴系的量化分析, 为球轴承的设计计算以及主轴的设计提供了重要参数。

**关键词:** Hertz 接触理论; 角接触球轴承; 数值分析

**中图分类号:** TH 133.33      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1003-2506(2008)11-1762-04

## Numerical analysis of the deformation and angle of contact of the high speed angular contact ball bearing

ZHANG Jia<sup>1</sup>, LI Zh<sup>1</sup>yuan<sup>1</sup>, ZHANG Chao<sup>2</sup>huang<sup>2</sup>

(1. School of Machinery and Automobile Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Luoyang Research Institute of Bearing, Luoyang 471039, China)

**Abstract:** Based on the Hertz contact theory and the rolling bearing analysis theory of Harris, numerical analysis is made of the deformation and angle of contact of angular contact ball bearing. The calculating method is also given. The simplified Hertz solution of Hamrock is applied to the deformation analysis of an example of the angular contact ball bearing so as to provide a basis for the quantification analysis and software development of the high speed bearing and spindle. The paper gives the important parameters for the design and calculating of the spindle and ball bearing.

**Key words:** Hertz contact theory; angular contact ball bearing; numerical analysis

### 0 引 言

滚动轴承广泛应用于各种机械装备中, 其支承性能对主机的静态及动态特性有较大影响, 在进行系统分析时, 通常都要对支承部位轴承的受载变形做出必要的分析。滚动轴承有一组滚动体和内、外圈接触, 属于多体接触组件, 内部受载变形为非线性, 较为复杂。

以往的机械系统分析, 由于计算工具与计算方法落后, 对轴承只能借助于手册进行简单的简化分析, 计算精度不高。随着计算机技术与数值分析方法的发展与完善, 轴承内部的受载变形已

能够实现较为精确的计算, 从而也能得出与实际更为接近的分析结果<sup>[1]</sup>。

为了提高机床主轴轴承的承载能力和刚度, 角接触球轴承一般以成对或多联组配在施加预载荷的情况下使用。在多联轴接触球轴承的组配中, 组配轴承组的预载荷和变形与单套轴承的测量预载荷和变形有密切的关系<sup>[2]</sup>。

接触应力与变形和载荷分布的计算是滚动轴承的分析基础, 需要求解含有第一类和第二类完全椭圆积分等的超越方程<sup>[3]</sup>, 而布鲁和哈姆罗克的简化方程也有较好的计算效果, 本文采用了这种计算方法。

收稿日期: 200711230; 修改日期: 20071220

作者简介: 张家库(1982-), 男, 河南信阳人, 合肥工业大学硕士生;  
李志远(1949-), 男, 安徽蚌埠人, 合肥工业大学教授, 博士生导师;  
张朝煌(1938-), 男, 江苏苏州人, 洛阳轴承研究所教授级高级工程师。

### 1 静态分析

滚动体与滚道之间的弹性接触变形, 常采用 Hertz 变形公式计算求得。轴承内部的变形主要是轴向变形  $\bar{D}$ 、径向变形  $\bar{D}$  和角变形  $H$  事实上它们就是轴承的主位移。在许多应用场合, 它们对机械系统的稳定, 对其他部件的动载荷以及系统的运转精度可能有至关重要的作用<sup>[4]</sup>。在实际计算分析中, 针对第  $j$  个滚动体, 有滚动体与内圈的法向趋近量  $\bar{D}_i$  和滚动体与外圈的法向趋近量  $\bar{D}_o$ 。

#### 1.1 $\bar{D}$ 、 $\bar{D}$ 和 $H$ 的求解

静态时, 因为没有内外圈滚道接触角的变化, 分析轴承的变形  $\bar{D}$ 、 $\bar{D}$  和  $H$  以及滚动体与内外圈的法向趋近量  $\bar{D}_i$  和  $\bar{D}_o$  较方便。对于球轴承, 在外圈固定情况下, 内圈的位移  $\bar{D}$ 、 $\bar{D}$  和  $H$  如图 1 所示。在联合载荷的作用下, 即已知轴向力  $F_a$ 、径向力  $F_r$  和作用力矩  $M$ , 由力平衡方程可以求得

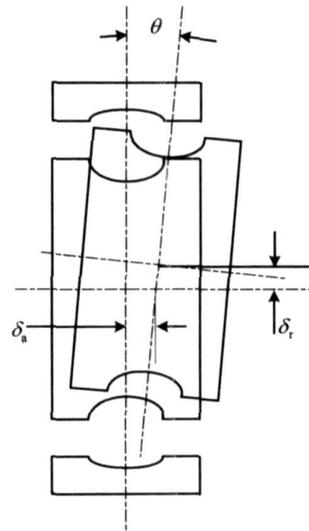


图 1 内圈位移图

$$F_a - K_n(BD)^{11.5} \sum_{U=0}^{U=2\pi} \left\{ \frac{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}} - 1}{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{11.5} (\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U) = 0 \quad (1)$$

$$F_r - K_n(BD)^{11.5} \sum_{U=0}^{U=2\pi} \left\{ \frac{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}} - 1}{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{11.5} (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U) \cos U = 0 \quad (2)$$

$$M - \frac{1}{2} d_m K_n(BD)^{11.5} \sum_{U=0}^{U=2\pi} \left\{ \frac{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}} - 1}{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos U)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{11.5} (\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos U) \cos U = 0 \quad (3)$$

简单的基本参数在此省略, 哈姆罗克关于载荷变形系数的关系式如下:

$$K_n = \left\{ \frac{1}{K_i^{\frac{2}{3}} + K_o^{\frac{2}{3}}} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$K_i = \frac{PED^{0.5} 11 033 9 \left( \frac{2f_i}{(2f_i - 1)(1 - G)} \right)^{0.636}}{3 \left[ 11 527 7 + 01 602 3 \ln \left( \frac{2f_i}{(2f_i - 1)(1 - G)} \right) \right]^{11.5}} \left[ \frac{21 000 6 + 01 596 8 \frac{(2f_i - 1)(1 - G)}{f_i}}{4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2G}{1 - G}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$K_o = \frac{PED^{0.5} 11 033 9 \left( \frac{2f_o}{(2f_o - 1)(1 + G)} \right)^{0.636}}{3 \left[ 11 527 7 + 01 602 3 \ln \left( \frac{2f_o}{(2f_o - 1)(1 + G)} \right) \right]^{11.5}} \left[ \frac{21 000 6 + 01 596 8 \frac{(2f_o - 1)(1 + G)}{f_o}}{4 - \frac{1}{f_o} - \frac{2G}{1 + G}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

至此由 (1)~(3) 式求解非线性方程组, 可以求得轴承的轴向变形  $\bar{D}$ 、径向变形  $\bar{D}$  和角变形  $H$

#### 1.2 静态接触角

在任意滚动体位置  $W$  处, 其工作接触角为  $A$  该接触角可由下式确定

$$\sin A = \frac{\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos W}{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos W)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos W)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

或

$$\cos A = \frac{\cos A^0 + \bar{D}_i \cos W}{[(\sin A^0 + \bar{D}_i + R_i H \cos W)^2 + (\cos A^0 + \bar{D}_i \cos W)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

#### 1.3 滚动体的法向趋近量 $\bar{D}_i$ 和 $\bar{D}_o$

利用 Hertz 弹性接触理论可对轴承内部的接触问题进行计算, 在其弹性理论假设条件下可求得各个滚珠在载荷作用下与内外圈接触时的法向变形, 即

$$\bar{D}_i = \left( \frac{9}{2P^2 E^2 D} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 11 527 7 + 01 602 3 \ln \left( \frac{2f_i}{(2f_i - 1)(1 - G)} \right) \right] @ \quad (9)$$

$$D_j = \left[ \frac{4 - \frac{1}{f_i} + \frac{2G}{1-G}}{11\ 068\ 9 \left( \frac{2f_i}{(2f_i - 1)(1-G)} \right)^{11.272} \left[ 11\ 000\ 3 + 01\ 596\ 8 \frac{(2f_i - 1)(1-G)}{2f_i} \right]} \right]^{1/3} Q_{nj}^{2/3} \quad (9)$$

$$D_j = \left[ \frac{9}{2P^2 E^2 D} \right]^{1/3} \left[ 11\ 527\ 7 + 01\ 602\ 3 \ln \left( \frac{2f_o}{(2f_o - 1)(1+G)} \right) \right] @$$

$$D_j = \left[ \frac{4 - \frac{1}{f_o} - \frac{2G}{1+G}}{11\ 068\ 9 \left( \frac{2f_o}{(2f_o - 1)(1+G)} \right)^{11.272} \left[ 11\ 000\ 3 + 01\ 596\ 8 \frac{(2f_o - 1)(1+G)}{2f_o} \right]} \right]^{1/3} Q_{nj}^{2/3} \quad (10)$$

其中,  $Q_{nj}$  表示沿接触角 A 作用的法向载荷。已知内外圈的法向位移  $D_j$  为

$$D_j = BD \left\{ [(\sin A + \bar{D} + R_i H \cos U)^2 + (\cos A + \bar{D} \cos U)^2]^{1/2} - 1 \right\} \quad (11)$$

则得

$$Q_{nj} = K_n (BD)^{11.5} \left\{ [(\sin A + \bar{D} + R_i H \cos U)^2 + (\cos A + \bar{D} \cos U)^2]^{1/2} - 1 \right\}^{11.5} \quad (12)$$

至此由(9), (10)式可得第 j 个滚动体 j 的法向趋近量 D 和  $D_j$ 。

## 2 动态分析

高速主轴是现代机床的重要特征, 转速提高导致惯性效应增强, 滚动体离心力和陀螺力矩效应显著增大, 接触角也随之发生变化<sup>[5]</sup>, 内圈滚道的接触角  $A_i$  增大, 外圈滚道的接触角  $A_o$  减小, 使得载荷和变形关系特性变得复杂, 也给求解带来一定的困难。所以, 对变形进行数值分析是基于外圈沟道控制理论的, 而且没有考虑润滑和轴承热位移等因素<sup>[6]</sup>。

为了便于分析, 图 2 所示引用 Harris 关于内外沟道曲率中心之间的轴向距离变量  $A_{ij}$  径向距离变量  $A_{2j}$  Jones 的新变量  $X_{1j}$  (球中心和外圈沟道曲率中心之间距离的轴向投影) 和  $X_{2j}$  (球中心和外圈沟道曲率中心之间距离的径向投影)。

遵循/ 外圈沟道控制理论, 设定系数  $K_{0j} = 2$ ,  $K_{1j} = 0$ , 得到滚动体公转角速度与沟道角速度比  $X_{\omega} / X$  和滚动体自转角速度与沟道角速度比  $X_R / X$ 。如图 3 所示, 分析滚动体受力平衡, 计算滚动体所受离心力和陀螺力矩, 可在任一滚动体 j 处列出求解方程。

图 2 中, 1 表示内圈道曲线中心最终位置; 2 表示内圈沟道曲线中心初始位置; 3 表示球中心最终位置; 4 表示球中心初始位置; 5 表示外圈沟道曲率中心(固定)。

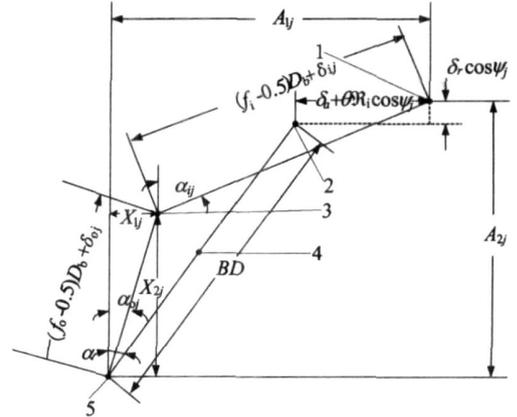


图 2 角位置  $\varphi$  处球中心和沟道曲率中心位置图

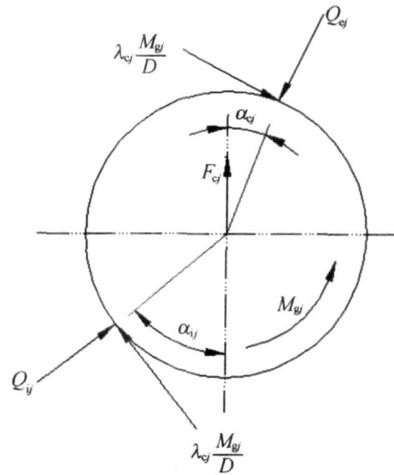


图 3 位置  $\varphi_j$  处滚动体的受力图

### 2.1 基本关系式

基本参数  $A_{1j}$ 、 $A_{2j}$ 、 $X_{1j}$ 、 $X_{2j}$ 、 $A_i$ 、 $A_o$  之间的基本关系式在此省略, 具体说明可参考相关资料。

滚动体受力平衡方程如下:

$$\frac{2M_{ij} X_{2j}}{D} - {}^*_{ij} D_j^5 X_{1j} + \frac{{}^*_{ij} D_j^{1.5} (A_{1j} - X_{1j})}{(f_o - 0.5)D + D_j} + \frac{{}^*_{ij} D_j^{1.5} (A_{2j} - X_{2j})}{(f_i - 0.5)D + D_j} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{{}^*_{ij} D_j^{1.5} X_{2j} + \frac{2M_{ij} X_{1j}}{D}}{(f_o - 0.5)D + D_j} - \frac{{}^*_{ij} D_j^{1.5} (A_{2j} - X_{2j})}{(f_i - 0.5)D + D_j} - F_{ij} = 0 \quad (14)$$

### 2.2 数值分析与求解

$D_i$ 、 $D_j$  和  $H$  已由静态求解得到, 则  $A_{1j}$  与  $A_{2j}$  只与角位置  $W$  有关<sup>[7]</sup>。由以上关系式和方程可以发现, 关键是求解一系列的非线性方程组。比较各种求解非线性方程组的方法, 应用牛顿拉弗逊法具有较好的效果。在求解分析过程中, 减少变量个数, 降低了雅可比矩阵的维数, 使其逆矩阵运算非常简单, 大大地减小求解的难度。 $D_i$ 、 $D_j$ 、 $X_{1j}$ 、 $X_{2j}$ 、 $A_i$  和  $A_j$  这 6 个变量关系复杂, 给非线性方程组的求解带来了很大难度, 本文推导出以下关系式:

$$D_i = \frac{A_{1j} \cos A_i - A_{2j} \sin A_j}{\sin(A_i - A_j)} - (f_i - 0.5)D$$

$$D_j = \frac{A_{2j} \sin A_i - A_{1j} \cos A_j}{\sin(A_i - A_j)} - (f_o - 0.5)D$$

$$X_{1j} = \frac{A_{2j} \tan A_i - A_{1j}}{\tan A_i - \tan A_j} \# \tan A_j$$

$$X_{2j} = \frac{A_{2j} \tan A_i - A_{1j}}{\tan A_i - \tan A_j}$$

至此, 上述非线性方程组 (13) 式与 (14) 式只有 2 个变量  $A_i$  和  $A_j$ , 选取合适的初值, 方程较易求解。由此解得接触角  $A_i$  和  $A_j$ , 则方程其余的变量都得到了。

### 3 实例分析

为了验证上述数值分析与计算方法, 以单套轴承静态参数计算为例加以说明。动态计算参数过多, 限于篇幅在此不再举例说明。VEA35 型轴承参数表如下:

轴承外径 621.0 mm; 轴承内径 351.0 mm; 内圈沟道曲率系数  $f_i$  为 0.55; 钢泊松比  $T=0.26$ ; 外圈沟道曲率系数  $f_o$  为 0.53; 另球密度为  $7180 \text{ kg/mm}^3$ ; 弹簧模量  $315000 \text{ MPa}$ ; 球数  $Z$  为 16; 初始接触角  $40^\circ$ ; 钢球直径  $71.94 \text{ mm}$

外界条件: 轴向力  $F_a=500 \text{ N}$ , 径向力  $F_r=275 \text{ N}$ , 力矩  $M=0$ 。

计算结果见表 1 所列。

表 2 静态计算结果

角位置 / (b)	$A_i / A_o$	$(Q_i / Q_o)$ / N	$(q_i / q_o)$ / MPa	$(D_i / D_o)$ / Lm
0 0	40 3 / 40 3	56 3 / 56 3	102 3 / 127 3	6 6 / 11 8
22.5	40 3 / 40 3	55 7 / 55 7	101 9 / 126 8	6 6 / 11 8
45 0	40 3 / 40 3	53 8 / 53 8	100 8 / 125 4	4 4 / 11 8

轴向变形  $D=41818.207 \text{ Lm}$ , 径向变形  $D=01449566 \text{ Lm}$ , 角变形  $H=010061352 \text{ Lm}$ 。

### 4 结束语

角接触球轴承的内部变形和接触角的变化可以是很多种不同的因素引起的, 例如安装方式、游隙类型、受载状况及润滑条件等。在许多工程应用当中, 为了保证转子系统的动态稳定性, 必须知道轴承的变形和接触角, 这个问题在高速系统中体现的较为明显。Palmgren 给出了一系列计算特定条件下轴承位移的近似公式, 在有些计算中可以用这些公式替代较为严格的公式。从相关资料中可以发现, 这种替代计算在低速情况下误差很小, 令人满意, 但在高速情况下误差较大, 对于精确计算尚显不足。

本文从数值分析与计算的角度上, 对高速角接触球轴承内部变形与接触角进行了简单的分类与分析, 为了得到数值解, 本文对轴承的分析做了一定的简化, 得到了较为合理的参数, 对轴承的高速性能与刚性性能有一定的参考价值<sup>[8]</sup>。

### [参 考 文 献]

- [1] 丁长安, 常 珺. 球轴承基本受载变形特性分析[J]. 润滑与密封, 2006, (8): 75- 80.
- [2] 李 鹏, 张中元. 多联角接触球轴承组配中预载荷和变形的分析[J]. 轴承, 2003, (6): 1- 3.
- [3] Wan Changsen. Analysis of rolling element bearings[M]. London: Mechanical Engineering Publications Ltd, 1991: 51- 52.
- [4] Harris T A. Rolling bearing analysis[M]. 3rd. John Wiley and Sons, 1990: 236- 238.
- [5] 陈全兵. 超高速角接触球轴承- 轴系统动态分析[J]. 洛阳工学院学报, 1999, 20(1): 42- 45.
- [6] 蒋兴奇, 马家驹. 高速精密角接触球轴承零件热位移分析[J]. 轴承, 2001, (1): 5- 7.
- [7] 徐士良. 数值方法与计算机实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 161- 194.
- [8] 蒋兴奇, 马家驹. 高速精密角接触球轴承结构与性能[J]. 轴承, 2000, (3): 1- 4.

(责任编辑 吕 杰)